

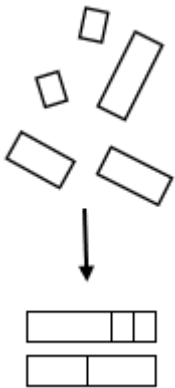
1. Bei den folgenden Aufgaben geht es um das sogenannte PARTITION-Problem.

- a. Ein Beispiel für ein PARTITION-Problem: Zwei Brüder haben ein Erbe erhalten, das aus mehreren Wertgegenständen besteht. Die Wertgegenstände können nicht zerteilt werden und haben die folgenden Werte (je höher die Zahl, desto höher der Wert):

2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 6

Bestimme mit dem beigelegten Material eine Möglichkeit, das Erbe gerecht aufzuteilen.

z.B. {2,3,3,3,6} und {2,4,5,6}



- b. Ein weiteres Beispiel für ein PARTITION-Problem: Im Ablauf eines Computerprogramms sollen mehrere voneinander unabhängige Aufgaben erledigt werden, für die die folgenden Zeiten benötigt werden:

3, 4, 5, 6, 7, 9, 12

Es stehen zwei Prozessorkerne zur Verfügung. Bestimme mit dem beigelegten Material eine Möglichkeit, die Aufgaben gleichmäßig auf die beiden Kerne zu verteilen, sodass beide gleich lang benötigen und damit alle Aufgaben schnellstmöglich erledigt sind.

z.B. {3,4,7,9} und {5,6,12}

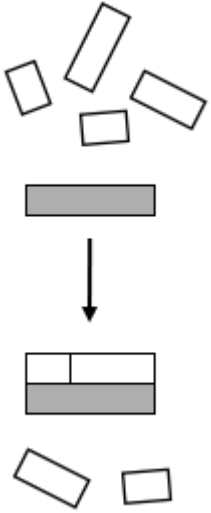
- c. Beschreibe, wie eine allgemeine Definition des PARTITION-Problems aussehen könnte.

z.B. Input: Mehrere positive Zahlen - Output: Entscheide, ob sich der Input komplett auf zwei Teilmengen aufteilen lässt, sodass die Summe der Werte in beiden Teilmengen gleich ist. Falls es möglich ist, gib auch eine solche Aufteilung an.

Vergleiche anschließend deine Definition mit der Definition auf den Kontrollkarten.

2. Wir betrachten nun zwei Beispiele für das SUBSET-SUM-Problem.

Auf dem Flohmarkt möchte der Standbetreiber Bastian einen Plattenspieler von Anna erwerben und bietet zum Tausch einige seiner Flohmarktgegenstände an. Anna bewertet Bastians Flohmarktgegenstände mit den Werten:



2, 5, 5, 6, 7, 10, 10, 11, 15

Nur wenn Bastian ihr Gegenstände anbietet, bei dem die Summe exakt 29 beträgt, ist Anna bereit, den Plattenspieler einzutauschen. Bestimme mit dem beigelegten Material eine Möglichkeit, wie Bastian Anna ein solches Angebot unterbreiten kann.

z.B. {2,5,5,7,10}

- a. Eine Marketingabteilung hat ein Budget von 53.000€ mit dem verschiedene Werbepartner engagiert werden sollen. Die Abteilung hat Angebote mit den folgenden Kosten erhalten (jeweils in Tsd. €):  
2, 4, 7, 9, 9, 11, 12, 18, 18
- Bestimme mit dem beigelegten Material, welche Angebote die Abteilung annehmen sollte, um ihren Budgetrahmen komplett auszunutzen.

z.B. {2,4,9,9,11,18}

- b. Beschreibe, wie eine allgemeine Definition des SUBSET-SUM-Problems aussehen könnte.

z.B. Input: Mehrere positive Zahlen und ein Zielwert - Output:

Entscheide, ob man eine Auswahl der Zahlen treffen kann, sodass

die Summe dieser Zahlen genau dem Zielwert entspricht. Falls es

möglich ist, gib auch eine solche Auswahl an.

Vergleiche anschließend deine Definition mit der Definition auf den Kontrollkarten.

### 3. Wir betrachten nun den Zusammenhang von PARTITION und SUBSET-SUM.



Link zu den  
Simulationen:  
[www.uni-goettingen.de/de/698629.html](http://www.uni-goettingen.de/de/698629.html)

- a. Mit der Simulation „Subset-Sum Visualizer“ können SUBSET-SUM-Instanzen gelöst werden. Mache dich kurz mit diesem Programm vertraut. (Achtung: Dieses Programm basiert auf systematischem Ausprobieren und ist sehr ineffizient. Daher braucht es für größere Instanzen sehr lange.)
- b. Hier ist nun eine schwierigere PARTITION-Instanz:  
6, 7, 10, 11, 12, 13, 17, 24

Bestimme mithilfe des „Subset-Sum Visualizer“ eine Lösung für diese.

z.B.  $\{10, 11, 12, 17\}$  und  $\{6, 7, 13, 24\}$

---

- c. Für die folgende PARTITION-Instanz existiert keine perfekte Aufteilung (sie ist nicht lösbar):

4, 7, 8, 14, 15, 15, 18, 19

Erläutere, wie man das mit dem „SubsetSum Visualizer“ zeigen kann.

Die Summe der Zahlen ist 100, aber mit der Simulation kann man zeigen, dass keine Teilmenge mit Summe 50 existiert => Instanz nicht lösbar

---

- d. Begründe jeweils, warum die folgenden Aussagen gelten müssen.

- Mit einem Algorithmus für SUBSET-SUM kann auch jede beliebige PARTITION-Instanz gelöst werden

Man nimmt die Werte der Partition-Instanz als Input, als Zielwert die Hälfte der Summe dieser Werte. Genau dann wenn der Subset-Sum-Algorithmus eine entsprechende Teilmenge findet, ist die Partition- Instanz lösbar. Die Aufteilung ist dann die gefundene Teilmenge und ihr Komplement.

---

- SUBSET-SUM ist eine Verallgemeinerung von PARTITION beziehungsweise PARTITION ist ein Spezialfall von SUBSET-SUM

Wie eben gezeigt, kann jede Partition-Instanz als ein Problem aus Subset-Sum-Instanzen umformuliert werden.

---

- Jeder polynomielle Algorithmus für SUBSET-SUM kann auch als ein polynomieller Algorithmus für PARTITION verwendet werden

Verwendet man für obiges Verfahren einen polynomiellen Subset-

Sum-Algorithmus, erhält man einen polynomiellen Partition-Algorithmus.

- Wenn kein polynomieller Algorithmus für PARTITION existiert, kann ein solcher auch nicht für SUBSET-SUM existieren

Folgt als logische Umkehrschluss aus der letzten Aussage.

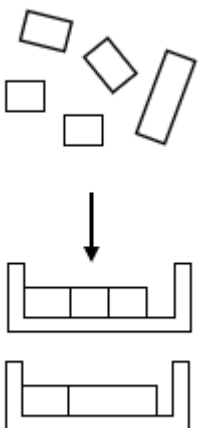
- e. Begründe, welches der folgenden Zeichen du nun verwenden müsstest, wenn man die algorithmische Schwierigkeit des PARTITION- und des SUBSET-SUM-Problems vergleicht:  $<$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ ,  $>$

PARTITION  $\leq$  SUBSET-SUM

Da mit einem Subset-Sum-Algorithmus auch jede Partition-Instanz gelöst werden kann, ist Subset-Sum mindestens algorithmisch genauso schwierig wie Partition.

Man sagt auch, PARTITION lässt sich auf SUBSET-SUM reduzieren.

4. Wir betrachten nun zwei Beispiele für das BINPACKING-Problem:



- a. Familie Müller hat im Urlaub viele Souvenirs gekauft. Diese wiegen (in kg):  
2, 2, 4, 6, 6, 7, 8, 9, 15

Bei ihrer Airline gelten aber strenge Gewichtsvorschriften. Koffer dürfen maximal 20 kg Inhalt haben und für jeden zusätzlichen Koffer muss eine Gebühr gezahlt werden. Bestimme mit dem beigelegten Material eine Möglichkeit, wie Familie Müller ihre Souvenirs mit möglichst wenigen Koffern transportieren kann.

Minimale Anzahl Koffer ist 3, z.B. durch {2,2,15}, {4,7,9}, {6,6,8}

- b. Eine Logistikfirma hat den Auftrag bekommen, mehrere Waren in eine andere Stadt zu transportieren. Diese wiegen (in t):  
3, 7, 7, 7, 10, 12, 12, 14, 14, 17, 17, 21, 21

Der LKW der Firma kann maximal 41t transportieren. Bestimme mit dem beigelegten Material, wie die Waren aufgeteilt werden müssen, damit sie mit der kleinstmöglichen Anzahl an LKW-Fahrten transportiert werden können.

Minimale Anzahl LKWs ist 4, z.B. durch {3,7,10,21}, {7,12,21}, {7,17,17}, {12,14,14}

- c. Beschreibe, wie eine allgemeine Definition des BINPACKING-Problems aussehen könnte.

Input: Mehrere positive Zahlen und eine Bingröße - Output: Eine Aufteilung der Zahlen in die kleinstmögliche Anzahl von Teilmengen, wenn gilt, dass die Summe der Zahlen in einer Teilmenge nicht größer als die Bingröße sein darf.

Vergleiche anschließend deine Definition mit der Definition auf den Kontrollkarten.

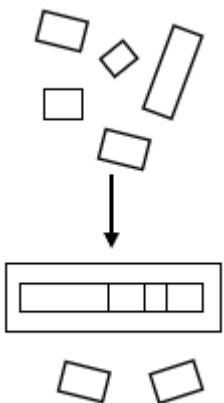
- d. Reduziere nun PARTITION auf BINPACKING mithilfe der Simulation „Binpacking Visualizer“ und den folgenden zwei PARTITION-Instanzen:

10, 12, 13, 14, 15, 18, 18 (lösbar)

5, 13, 14, 14, 15, 19, 20 (nicht lösbar)

Berechne die Summe aller Zahlen der Partition-Instanz und verwende die Hälfte dieser Zahl als Bingröße. Genau dann, wenn ein Binpacking-Algorithmus eine Aufteilung mit zwei Bins findet, ist die Partition-Instanz lösbar.

5. Zuletzt betrachten wir das KNAPSACK-Problem:



- a. Familie Müller hat in ihrem Strandurlaub mehrere angespülte „Schätze“ entdeckt und möchte eine Auswahl davon mit nach Hause nehmen. Die Familie bewertet ihre Fundstücke, die gleichzeitig folgende Gewichte haben:

Gewicht (in kg)	4	5	5	6	6	6	10
Wert (in Goldstücken)	5	6	6	8	8	8	11

Durch die Beschränkungen der Airline kann Familie Müller nur 20 kg transportieren. Bestimme mit dem beigelegten Material, welche „Schätze“ Familie Müller auswählen sollte, um so wertvolle Fundsachen wie möglich mitzunehmen.

Maximaler Gesamtwert ist 25, z.B. mit den Gewichten {4,5,5,6}

- b. Ein Containerschiff erhält viele verschiedene Aufträge, bestimmte Waren zu transportieren:

Gewicht (in t)	4	5	7	8	12	13	16
Bezahlung (in Tsd. €)	6	6	7	8	11	15	16

Das Schiff kann aber nur maximal 35t transportieren. Bestimme mit dem beigelegten Material, welche Aufträge der Kapitän annehmen sollte, um möglichst viel Gewinn zu machen

Maximaler Gesamtwert ist 38, z.B. mit den Gewichten {4,5,12,13}

- c. Beschreibe, wie eine allgemeine Definition des KNAPSACK-Problems aussehen könnte.

Input: Eine Gewichtsgrenze und mehrere Objekte, wobei jedes

Objekt ein positives Gewicht und einen positiven Wert hat - Output:

Eine Auswahl der Objekte, bei der die Summe der Werte maximal ist,

wenn gilt, dass die Summe der Gewichte in dieser Auswahl die

Gewichtsgrenze nicht überschreiten darf.

Vergleiche anschließend deine Definition mit der Definition auf den Kontrollkarten.

- d. Reduziere nun PARTITION auf KNAPSACK mithilfe der Simulation „Knapsack Visualizer“ und den folgenden zwei PARTITION-Instanzen:  
 7, 9, 10, 11, 12, 14, 16, 21 (lösbar)  
 5, 6, 7, 11, 13, 18, 18, 22 (nicht lösbar)

Nutze als Gewichte die Zahlen der Partition-Instanz. Nutzt als Wert

für jedes Objekt sein Gewicht Und als Gewichtsobergrenze die  
Hälfte der Summe aller Zahlen der Partition-Instanz. Genau dann,  
wenn der Knapsack-Algorithmus eine optimale Auswahl findet, die  
die Gewichtsobergrenze erreicht, ist die Partition-Instanz lösbar.

---

Bonusaufgabe: Das 3-PARTITION-Problem ist ein mit dem PARTITION-Problem verwandtes Problem, bei dem eine Menge von Zahlen nicht in zwei, sondern in drei Teilmengen unterteilt werden soll, deren Summen gleich groß sind. (Beispiel: 1, 2, 2, 2, 3, 5, 6 =>  $1+6 = 2+5 = 2+2+3$ ) Reduziere PARTITION auf 3-PARTITION.

Berechne die Summe aller Werte einer Partition-Instanz und halbiere  
diese Summe. Nutze diesen Wert zusammen mit allen Werten aus der  
Partition-Instanz als Input für den 3-Partition-Algorithmus. Genau  
dann, wenn dieser eine Lösung findet, ist die Partition-Instanz lösbar.

---